

ΜΑΘΗΜΑ 15

1.3 ΜΟΝΟΤΟΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Συνάρτηση “1-1”

Αντίστροφη συνάρτηση

Θεωρία – Σχόλια – Μέθοδοι – Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

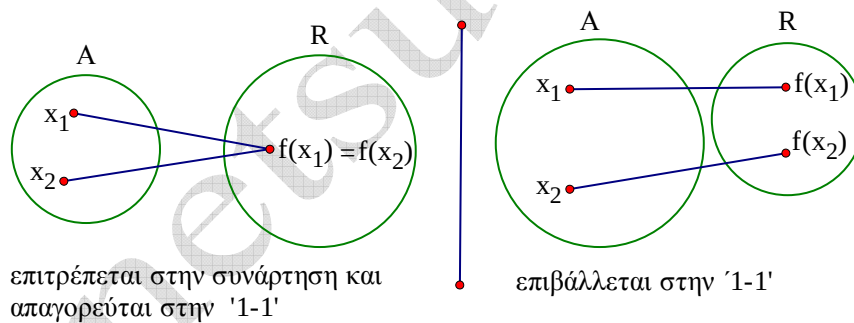
Ορισμός

Συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται **συνάρτηση “1 – 1”**, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $f(x_1) \neq f(x_2)$,

ή διαφορετικά, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2)$, ισχύει $x_1 = x_2$.

2.

Βελοδιάγραμμα:

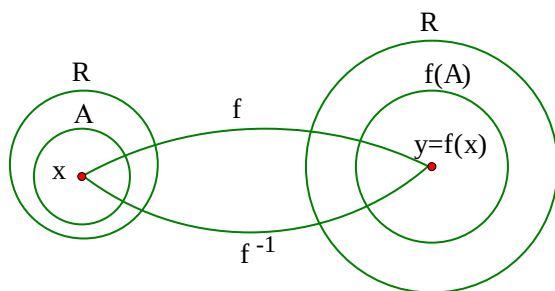


3.

Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι “1 – 1”.

Αντίστροφη συνάρτηση της f (συμβολίζεται f^{-1}) λέγεται νέα συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ με την οποία, το τυχαίο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται σ’ εκείνο το $x \in A$, το οποίο με την f , είχε αντιστοιχηθεί στο y



4.

Παρατήρηση

Οι f , f^{-1} εναλλάσσουν πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών.

5.

Ιδιότητες

Ισχύει η ισοδυναμία: $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Ισχύουν οι ισότητες $f^{-1}(f(x)) = x$, $f(f^{-1}(y)) = y$

Οι C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο $y = x$.

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Μια άλλη έκφραση του ορισμού της “1 – 1”

Συνάρτηση f είναι “1 – 1”, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ (με άγνωστο x) έχει ακριβώς μία λύση.

2.

Κάτι χρήσιμο

Αν συνάρτηση f είναι “1 – 1”, δεν υπάρχουν σημεία της C_f με την ίδια τεταγμένη.

3.

Άμεση συνέπεια

Αν συνάρτηση f είναι “1 – 1”, τότε κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει τη C_f το πολύ σε ένα σημείο.

4.

Άμεση συνέπεια

Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι “1 – 1”. (Όχι αντίστροφα)

5.

Χρυσές ισοδυναμίες

Αν συνάρτηση f είναι “1 – 1”, ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$f(x_1) \neq f(x_2) \Leftrightarrow x_1 \neq x_2$$

6.

Χρυσές ισοδυναμίες

Αν υπάρχει η f^{-1} , θα ισχύουν οι ισοδυναμίες :

$$h(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{-1}(h(x)) = f^{-1}(g(x)).$$

$$h(x) = g(x) \Leftrightarrow f(h(x)) = f(g(x))$$

7.

Μια ιδιότητα

Αν f γνησίως αύξουσα, τότε και f^{-1} γνησίως αύξουσα.

(Το ίδιο για γνησίως φθίνουσα)

Απόδειξη

Έστω τυχαία $f(x_1) < f(x_2)$.

Θα αποδείξουμε ότι $f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))$, δηλαδή ότι $x_1 < x_2$.

Αν ήταν $x_1 \geq x_2$ και αφού f γνησίως αύξουσα, θα ήταν $f(x_1) \geq f(x_2)$ που είναι άτοπο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν οι f, g συναρτήσεις είναι “1 – 1” τότε και η $g \circ f$ είναι “1 – 1”.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x_1, x_2 \in D_{g \circ f}$ τυχαία με $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow$

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{άρα η } g \circ f \text{ είναι “1 – 1”}.$$

Σχόλιο 5

2.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν η συνάρτηση $f \circ g$ είναι “1-1”, να δείξετε ότι και η g είναι “1-1”

Προτεινόμενη λύση

Έστω $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow$

$$f(g(x_1)) = f(g(x_2))$$

$$(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$$

Σχόλιο 5

και επειδή $f \circ g$ είναι “1-1”, θα έχουμε $x_1 = x_2$, άρα η g είναι “1-1”

3.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.

Προτεινόμενη λύση

Η υπόθεση γίνεται $(f \circ f)(x) = f(x) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (1)

Έστω $f(x_1) = f(x_2)$ (2) $\Rightarrow$

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow$$

(1)

$$(f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2) \Rightarrow$$

(2)

$$f(x_1) + x_1 = f(x_2) + x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \text{ άρα η } f \text{ είναι “1-1”}.$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

4.

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $-f(x) + \eta\mu f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι είναι “1-1”.

Υπόδειξη

$\eta\mu f(x) = f(x) + 2x$ και ακολουθούμε την άσκηση 3.

5.

Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) - f(x) + 3 = 2x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι είναι “1-1”.

Υπόδειξη $f^2(x) = f(x) + 2x^3 - 3$ και ακολουθούμε την άσκηση 3.

6.

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα να λύσετε την εξίσωση
 $(f \circ f)(x^2 - x) = (f \circ f)(x - 1)$

Προτεινόμενη λύση

$$(f \circ f)(x^2 - x) = (f \circ f)(x - 1) \Leftrightarrow f(f(x^2 - x)) = f(f(x - 1))$$

Σχόλιο 6

$$f(x^2 - x) = f(x - 1)$$

$$x^2 - x = x - 1$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

7.

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι “1-1” και η C_f διέρχεται από τα σημεία
 $A(1, 2002)$, $B(2, 2004)$. Να λύσετε την εξίσωση $2 + f(x^2 - 3) = f(2)$

Προτεινόμενη λύση

Είναι $f(1) = 2002$ και $f(2) = 2004$

$$2 + f(x^2 - 3) = f(2) \Leftrightarrow 2 + f(x^2 - 3) = 2004$$

Σχόλιο 5

$$f(x^2 - 3) = 2002$$

$$f(x^2 - 3) = f(1)$$

$$x^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -2$$

8.

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ είναι “1-1” και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει
 $f(x)f(2-x) = f(\mu x - \kappa)$ όπου $\mu, \kappa \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\mu = 0$
και $f(2 + \kappa) = 1$.

Προτεινόμενη λύση

Για $x = 0$ είναι $f(0)f(2-0) = f(\mu \cdot 0 - \kappa)$

$$f(0)f(2) = f(-\kappa) \quad (1)$$

Για $x = 2$ είναι $f(2)f(2-2) = f(\mu \cdot 2 - \kappa)$

$$f(2)f(0) = f(2\mu - \kappa) \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow f(2\mu - \kappa) = f(-\kappa)$

$$2\mu - \kappa = -\kappa \Rightarrow 2\mu = 0 \Rightarrow \mu = 0$$

Για $x = 2 + \kappa$, η $f(x)f(2-x) = f(\mu x - \kappa) \Rightarrow f(2 + \kappa)f(2 - 2 - \kappa) = f(-\kappa)$

$$f(2 + \kappa)f(-\kappa) = f(-\kappa)$$

και επειδή $f(x) \in \mathbb{R}^*$, $f(2 + \kappa) = 1$

9.

Αφού αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$ είναι “1-1”, να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2-1} - e^{x-1} = x - x^2$.

Προτεινόμενη λύση

$$D_f = \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f είναι άθροισμα των συναρτήσεων $\omega(x) = e^x$ και $\varphi(x) = x$, οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες, οπότε και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα “1-1”

$$\begin{aligned} \text{Η εξίσωση } e^{x^2-1} - e^{x-1} = x - x^2 \text{ γράφεται } e^{x^2-1} + x^2 &= e^{x-1} + x \\ e^{x^2-1} + x^2 - 1 &= e^{x-1} + x - 1 \\ f(x^2 - 1) &= f(x - 1) \\ x^2 - 1 &= x - 1 \\ x^2 - x &= 0 \\ x(x - 1) = 0 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \end{aligned}$$

10.

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

i) Να αποδείξετε ότι είναι “1-1”

ii) Να λύσετε την εξίσωση $e^{\eta\mu x} + \eta\mu x = \sqrt{e} + \frac{1}{2}$

iii) Δείξτε ότι $e^e + e < e^\pi + \pi$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$D_f = \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f είναι άθροισμα των συναρτήσεων $\omega(x) = e^x$ και $\varphi(x) = x - 1$, οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες, οπότε και η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα “1-1”.

ii)

$$\text{Η εξίσωση } e^{\eta\mu x} + \eta\mu x = \sqrt{e} + \frac{1}{2} \text{ γράφεται } e^{\eta\mu x} + \eta\mu x - 1 = \sqrt{e} + \frac{1}{2} - 1$$

$$f(\eta\mu x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\eta\mu x = \frac{1}{2}$$

$$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ή } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

iii)

$$\begin{aligned} e^e + e < e^\pi + \pi &\Leftrightarrow e^e + e - 1 < e^\pi + \pi - 1 \\ f(e) < f(\pi) &\text{ που ισχύει αφού } e < \pi \text{ και} \\ &f \text{ γνησίως αύξουσα.} \end{aligned}$$

11.

Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Προτεινόμενη λύση

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$y = x^3 - 3x^2 + 3x \Leftrightarrow y - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$y - 1 = (x - 1)^3 \quad (1)$$

- Όταν $y - 1 \geq 0$, δηλαδή όταν $y \geq 1$.

Σχόλιο 1

$$H(1) \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt[3]{y - 1} \quad \text{με } y \geq 1$$

$$x = \sqrt[3]{y - 1} + 1 \quad \text{με } y \geq 1, \text{ μοναδική λύση}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 1} + 1 \quad \text{με } x \geq 1$$

- Όταν $y - 1 < 0$, δηλαδή όταν $y < 1$.

Στην άλγεβρα Α' Λυκείου
δες την εξίσωση $x^3 = a$

$$H(1) \Leftrightarrow x - 1 = -\sqrt[3]{|y - 1|} \quad \text{με } y < 1$$

$$x = -\sqrt[3]{1 - y} + 1 \quad \text{με } y < 1, \text{ μοναδική λύση}$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{|x - 1|} + 1 \quad \text{με } x < 1$$

$$f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{1 - x} + 1 \quad \text{με } x < 1$$

12.

Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 3$.

Υπόδειξη. $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 2$

$y - 2 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ και ακολουθούμε την άσκηση 11.

13.

Αν συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και αντιστρέψιμη, να δείξετε ότι και η f^{-1} είναι περιττή.

Προτεινόμενη λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x)$

ή ότι $f(f^{-1}(-x)) = f(-f^{-1}(x))$

Είναι $f(f^{-1}(-x)) = -x \quad (1)$

και $f(-f^{-1}(x)) = -f(f^{-1}(x)) = -x \quad (2)$

Από τις (1), (2) έχουμε το ζητούμενο.

14.

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ώστε $[f(x)]^3 + f(x) - x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1} .

Προτεινόμενη λύση

Η υπόθεση γράφεται $[f(x)]^3 + f(x) = x$ **(1)**

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow [f(x_1)]^3 = [f(x_2)]^3$

Προσθέτουμε κατά μέλη $[f(x_1)]^3 + f(x_1) = [f(x_2)]^3 + f(x_2) \xRightarrow{(1)} x_1 = x_2$

Άρα η f είναι “1-1”, άρα αντιστρέφεται.

Για το τυχαίο $y \in f(\mathbb{R})$, η (1) $\Leftrightarrow y^3 + y - x = 0$

$$x = y^3 + y, \text{ άρα } f^{-1}(x) = x^3 + x$$

15.

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει $f(f(x)) + x = 0$. Να αποδείξετε ότι

i) η f είναι “1-1”

ii) $f^{-1}(x) = -f(x)$

iii) η f είναι περιττή

iv) η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

Προτεινόμενη λύση

Η υπόθεση γράφεται $f(f(x)) = -x$ **(1)**

i)

Έστω $f(x_1) = f(x_2) \xRightarrow{(1)} f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow$

$$-x_1 = -x_2 \Rightarrow$$

$$x_1 = x_2 \text{ άρα } f \text{ “1-1”}$$

ii)

Στην (1) όπου x θέτουμε $f^{-1}(x)$, οπότε $f(f(f^{-1}(x))) = -f^{-1}(x)$

$$f(x) = -f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) = -f(x)$$

iii)

Στην (1) όπου x θέτουμε $f(x)$, οπότε $f(f(f(x))) = -f(x)$

$$\text{αλλά, από την (1) είναι } f(f(x)) = -x$$

$$\text{άρα } f(-x) = -f(x) \text{ άρα } f \text{ περιττή}$$

iv)

Έστω ότι η f είναι γνησίως μονότονη (ας είναι γνησίως αύξουσα).

Τότε f^{-1} γνησίως αύξουσα και $-f$ γνησίως φθίνουσα, που είναι άτοπο, αφού κατά το (iii) είναι ίσες

$\begin{aligned} x_1 = x_2 &\Rightarrow \\ f(x_1) &= f(x_2) \end{aligned}$
--

16.

Για τη συνάρτηση f δίνεται ότι $f(f(x)) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και $f^{-1}(x) = \ln f(x)$, $x \in \mathbb{R}$

ii) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) = e^{f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$

iii) Να λυθεί η εξίσωση $(f(f(x)))^2 + f^{-1}(e^{f(x)}) = 6$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\text{Έστω } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$$

$$e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{άρα } f \text{ “1-1”}$$

Επομένως η f αντιστρέφεται.

Στην υπόθεση $f(f(x)) = e^x$, όπου x θέτουμε $f^{-1}(x)$

$$f(f(f^{-1}(x))) = e^{f^{-1}(x)} \Rightarrow f(x) = e^{f^{-1}(x)} \Rightarrow \ln f(x) = f^{-1}(x)$$

ii)

Στην υπόθεση $f(f(x)) = e^x$, όπου x θέτουμε $f(x)$

$$f(f(f(x))) = e^{f(x)}, \quad \text{αλλά } f(f(x)) = e^x, \quad \text{άρα } f(e^x) = e^{f(x)}$$

iii)

$$\text{Από την υπόθεση και το (ii), η εξίσωση γράφεται } (e^x)^2 + f^{-1}(f(e^x)) - 6 = 0$$

$$(e^x)^2 + e^x - 6 = 0$$

$$\Delta = 1 + 24 = 25, \quad e^x = \frac{-1 \pm 5}{2} = 2 \quad \text{ή} \quad -3 \quad \text{απορρίπτεται σαν μη θετική}$$

$$\text{Άρα } e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

17.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται

ii) $(f(x))^3 = f(x^3)$

iii) αν $f(8) = 64$ να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$\text{Έστω } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2))$$

$$x_1^3 = x_2^3$$

$$x_1 = x_2 \quad \text{άρα } f \text{ "1-1", άρα αντιστρέφεται}$$

ii)

Στην υπόθεση $f(f(x)) = x^3$ όπου x θέτουμε $f(x)$

$$f(f(f(x))) = (f(x))^3, \text{ αλλά } f(f(x)) = x^3 \text{ οπότε}$$

$$f(x^3) = (f(x))^3$$

iii)

$$f(8) = 64 \Leftrightarrow f(2^3) = 64 \stackrel{(ii)}{\Leftrightarrow} (f(2))^3 = 4^3 \Leftrightarrow f(2) = 4$$

18.

Δίνεται συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι

i) f αντιστρέψιμη

ii) $(f(x))^3 = f(x^3)$

iii) $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Προτεινόμενη λύση

Για (i) και (ii) βλέπε άσκηση 17.

iii)

Θα αποδείξουμε ότι, για το τυχαίο $y \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x) = y$.

α) Όταν $y \geq 0$, τότε ο ζητούμενος x είναι ο $f(\sqrt[3]{y})$, αφού από την υπόθεση

$$f(f(x)) = x^3 \text{ έχουμε } f(f(\sqrt[3]{y})) = (\sqrt[3]{y})^3 = y.$$

β) Όταν $y < 0$, τότε ο ζητούμενος x είναι ο $f(-\sqrt[3]{-y})$, αφού από την υπόθεση

$$f(f(x)) = x^3 \text{ έχουμε } f(f(-\sqrt[3]{-y})) = (-\sqrt[3]{-y})^3 = -(\sqrt[3]{-y})^3 = -(-y) = y$$

19.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών $(0, +\infty)$.

Αν $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\text{ii)} \quad f(-x) = \frac{1}{f(x)}, \quad \text{iii)} \quad f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

iv) Αν επί πλέον η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μοναδική λύση, να

αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.

v) Αν η f είναι “1-1”, να αποδείξετε ότι, για κάθε $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$

$$\text{ισχύει} \quad f^{-1}(\alpha\beta) = f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta).$$

Προτεινόμενη λύση**i)**

$$\begin{aligned} \text{Για } x=0 \text{ και } y=0 \text{ έχουμε } f(0+0) &= f(0) \cdot f(0) \Rightarrow \\ f(0) &= f(0) \cdot f(0) \Rightarrow 1 = f(0) \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \text{Για } y=-x \text{ έχουμε } f(x-x) &= f(x) \cdot f(-x) \\ f(0) &= f(x) \cdot f(-x) \\ 1 = f(x) \cdot f(-x) &\Rightarrow f(-x) = \frac{1}{f(x)} \end{aligned}$$

iii)

$$f(x-y) = f(x+(-y)) = f(x) \cdot f(-y) = f(x) \cdot \frac{1}{f(y)} = \frac{f(x)}{f(y)}$$

iv)

Επειδή $f(0) = 1$, η μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 1$ είναι $x = 0$ **(1)**

$$\text{Έστω } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{f(x_1)}{f(x_2)} = 1$$

$$f(x_1 - x_2) = 1 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_1 = x_2, \text{ άρα } f \text{ “1-1”}$$

v)

$$\text{Η υπόθεση } \Rightarrow f(f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta)) = f(f^{-1}(\alpha)) \cdot f(f^{-1}(\beta))$$

$$f(f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta)) = \alpha\beta$$

$$f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta) = f^{-1}(\alpha\beta)$$

20.

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x^2 - x + 1) = f^2(x) - f(x) + 1$

ii) Να βρείτε την τιμή $f(1)$

iii) Αν $g(x) = x^2 - xf(x) + 1$, να δείξετε ότι η g δεν είναι “1 – 1”.

Προτεινόμενη λύση

i)

Ονομάζουμε την υπόθεση $f(f(x)) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1)

$$(1) \Rightarrow f(f(f(x))) = f(x^2 - x + 1) \quad (2)$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

$$\text{Στην (1), όπου } x \text{ θέτουμε } f(x): f(f(f(x))) = f^2(x) - f(x) + 1 \quad (3)$$

$$\text{Από τις (2), (3)} \Rightarrow f(x^2 - x + 1) = f^2(x) - f(x) + 1 \quad (4)$$

ii)

$$\text{Για } x = 1, \text{ η (4)} \Rightarrow f(1^2 - 1 + 1) = f^2(1) - f(1) + 1$$

$$f(1) = f^2(1) - f(1) + 1$$

$$0 = f^2(1) - 2f(1) + 1$$

$$0 = [f(1) - 1]^2$$

$$f(1) - 1 = 0$$

$$f(1) = 1 \quad (5)$$

iii)

Αρκεί να βρούμε δύο τιμές του x , οι οποίες αντιστοιχίζονται στην ίδια τιμή $g(x)$.

$$\text{Για } x = 1 \text{ είναι } g(1) = 1^2 - 1 \cdot f(1) + 1 \stackrel{(5)}{=} 1 - 1 \cdot 1 + 1 = 1$$

Σχόλιο 2

$$\text{Για } x = 0 \text{ είναι } g(0) = 0^2 - 0 \cdot f(0) + 1 = 1$$

Επομένως $g(1) = g(0)$, άρα η g δεν είναι “1 – 1”.